数理解析研究所講究録
440巻 1981年 145-151

続・数の幾何学と類体論

名大理　久保田 富雄

本講究録411（[1]）において，1のn乗根を含む体におけるnベキ剰余の相互法則，特に

(A)　　$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n=1$,　　$(\beta\equiv 1\ \ (n^2\alpha))$,

の形のものは，格子点に関する単純な幾何学的かつ直観的現象に他ならず，従って，類体論自体が，同程度に簡易な事実とみなされる，ということを述べたが，そこにおいては，(A)の数の幾何学的導き出し方として，仮に first method と呼んでおいたものを説明しただけで，虚の2次体以外の一般な場合を扱う際に，重要な極め手となるひとつの論法について説明することができなかった．その論法の概略を説明するのが本報告の目的である．

簡単のため，$n=4$とし，Gaussの数体$F=Q(i)$の場合をあつかう．しかし，これは実質的な制約ではなく，以下に

述べる考え方は、任意の数体において，そのまま通用するのである．

F の整数環を $\mathfrak{o}=\mathbb{Z}[i]$ とし，複素平面 $\mathbb{C}$ の変換であって $z\to\sigma(\varepsilon,\xi)z=\varepsilon z+\xi$，（$\varepsilon^4=1$，$\xi\in\mathfrak{o}$），の形のもの全体のなす群を Γ とする．Γ の作用は不連続的であって，Γ の単位元以外の元の不動点となるのは $\frac{1}{2}\mathfrak{o}$ の元である．そこで $\mathbb{C}_0=\mathbb{C}-\frac{1}{2}\mathfrak{o}$ とすると，$\Gamma\backslash\mathbb{C}_0$ の基本領域として，0，$\frac{1}{2}$，$\frac{i}{2}$，$\frac{1+i}{2}$ を頂点とする正方形 D，（頂点は除き，辺は $(0,\frac{1}{2})$ と $(\frac{1}{2},\frac{1+i}{2})$ とを属させる），を取ることができる．

任意の $z\in\mathbb{C}_0$ について，$\sigma(\varepsilon,\xi)z_0=z$ となる $z_0\in D$ および $\sigma(\varepsilon,\xi)\in\Gamma$ をとり，$\varepsilon=\varepsilon(z)$ と書く．これは z について一意的に定まり，Gauss の lemma によって

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4=\prod_{\gamma\in\frac{1}{\beta}\mathfrak{o}\cap D}\varepsilon^{\alpha}(\gamma),\qquad(\varepsilon^{\alpha}(\gamma)=\varepsilon(\alpha\gamma)),$$

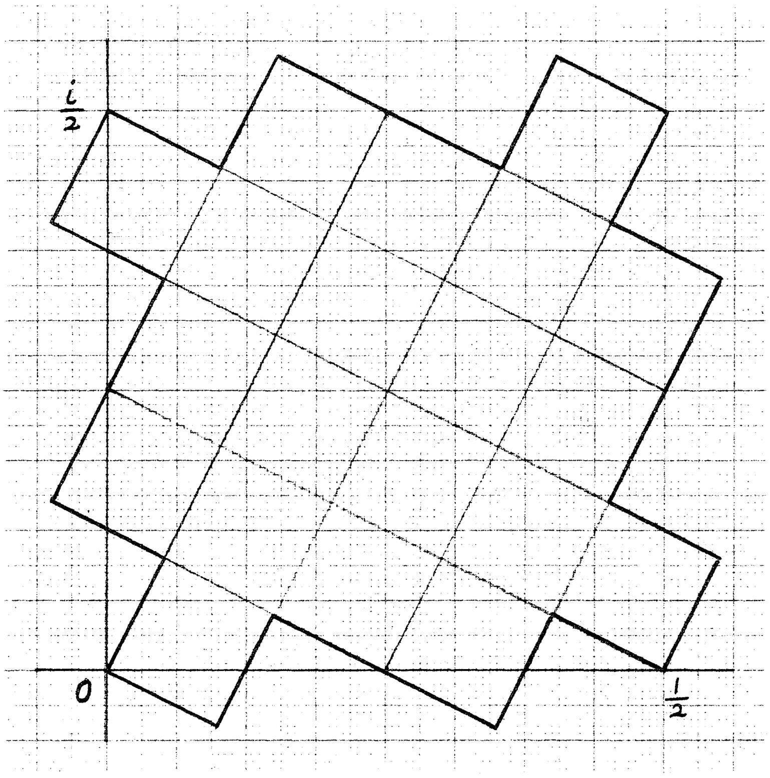
がなりたつ．従って，(A) を言うには，D 内の β 分点 (i.e. $\frac{1}{\beta}\mathfrak{o}$ の元) γ について，$\varepsilon(\alpha\gamma)$ が 4 の倍数個ずつ等しくなることを言えばよいのであるが，この D ではそういうことは一般に言えない．そこで，D の各辺を細分したり，“β 変形” と仮に名づけた変形を行ったりして，少し違った基本領域を改めてとり直すとうまく行くというのが上記 first method であった．

本報告の主題は，Dについて，“α変形”(これも仮の名)という操作を行って，別の基本領域を構成することである．

$\sigma \in \Gamma$のうちで，$\alpha^{-1}\sigma D$とDとの共通部分が空でなく，しかも，その共通部分が面積で考えて$\alpha^{-1}\sigma D$の半分より大きくなるものの集合をΣとする．但し，$\alpha^{-1}\sigma D \cap D$の面積が$\alpha^{-1}\sigma D$の面積のちょうど半分になるときは，$\alpha$にごく近い複素数$\alpha'$をとり，$\alpha'^{-1}\sigma D \cap D$の面積によって同様に判断するものとする．$\Sigma$は有限集合であり，

$$(1) \qquad \overline{D^{(1)}} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \alpha^{-1}\sigma \overline{D}$$

によって$\Gamma \backslash \mathbb{C}_0$の基本領域$D^{(1)}$が得られる．$\alpha = 2(2+i)$として$D^{(1)}$の形を示すならば左図のようになる．小さな正方形がひとつずつ$\alpha^{-1}\sigma D$になっているのである．



(1)の右辺のDを$D^{(1)}$におきかえて得られる

領域を $D^{(2)}$ とし，以下同様に

$$(2) \qquad \overline{D^{(k)}} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \alpha^{-1}\sigma\overline{D^{(k-1)}}$$

とおくと，$D^{(k)}$ はだんだん細かい折線でかこまれた図形となるが，0 と $\frac{1}{2}$ を結ぶ辺を 90° 回転したものが常に 0 と $\frac{i}{2}$ を結ぶ辺であり，対辺は平行である．もちろん，$D^{(k)}$ が $\Gamma\backslash\mathbb{C}_0$ の基本領域となるためには，境界を定めなければならないが，その定め方は，以上の定義からは一意的でない．しかし，$k\to\infty$ のとき $\overline{D^{(k)}}$ の極限は存在し，

$$(3) \qquad \overline{D^{\alpha}} = \lim_{k\to\infty} \overline{D^{(k)}}$$

により，やはり境界は別として，$\Gamma\backslash\mathbb{C}_0$ の基本領域 D^{α} が得られる．D^{α} は長さ ∞ の Jordan 曲線で囲まれ，0 を端点とする 2 辺，および対辺の関係は，$D^{(k)}$ と同様である．また，(2)，(3) によって

$$(4) \qquad \overline{D^{\alpha}} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \alpha^{-1}\sigma\overline{D^{\alpha}}$$

がなりたつ．このような D^{α} を D の α 変形と呼ぶのである．

$\overline{D^{\alpha}}$ の点は，Σ の元の無限列 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k, \cdots$ によって，$\lim_{k\to\infty} \alpha^{-1}\sigma_1\cdot\alpha^{-1}\sigma_2\cdot\cdots\cdot\alpha^{-1}\sigma_k D$ の形で得られるから，$\overline{D^{\alpha}}$ は $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ の基本領域の閉包である閉区間 $[0, 1]$ が，$0.a_1a_2\cdots a_k\cdots$

の形の小数全体の集合として定まる, という事実の類似を追って構成されたものということができる.

ここで, D^α の各辺に"β変形"をほどこす. 一般に有向曲線Cのβ変形とは, 本報告冒頭の式(A)内のβを$\beta=1+\beta_0$とあらわしたとき, Cの始点から$\frac{1}{\beta}C$を書き, その終点に$\frac{\beta_0}{\beta}C$をつないで得られる曲線をいう. この定義は[1]における定義と少し違うが, この方が扱い易いようである. さて, D^αの0, $\frac{1}{2}$を結ぶ辺をβ変形し, それをそのまま90°回転した形に0, $\frac{i}{2}$を結ぶ辺をβ変形し, 次に, これらの2辺を, それぞれ, $\frac{i}{2}$, $\frac{1}{2}$だけ平行移動した形となるよう, 残りの2辺をβ変形する. このようにして得られた領域をD^α_βとし, さらに

$$(5)\qquad \overline{D^*} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \alpha^{-1}\sigma\overline{D^\alpha_\beta}$$

によって, 最終的な領域D^*を定める. もちろん, D^*の境界については, その定め方が別に与えられなければならない. そればかりでなく, D^*は, 実は重なったり, 正負の部分が現われたりすると見なさなければならない領域なので, その点についても, 明確な規定を行う必要がある. これらの点については, 本報告では立ち入らないが, ともかく, このようにして領域$D^* = \Gamma\backslash\mathbb{C}_0$を作れば, それに対応して, $\vartheta(\beta)$

の代表系が定まり，Gauss の lemma は

$$(6) \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 = \prod_{\gamma \in \frac{1}{\beta}\mathcal{O} \cap D^*} \varepsilon^{\alpha}(\gamma)$$

の形でなりたつのである．しかし，$\alpha \equiv 0 \pmod 4$，$\beta_0 \equiv 0 \pmod{8\alpha^2}$ くらいにとっておけば，first method の場合と同じように，$\varepsilon^{\alpha}(z)$ が一定であるような $z \in D^*$ の作る領域は，β 倍に拡大すると，4つずつ組になって互いに整数の幅の平行移動で移れる領域（曲線を辺とする平行4辺形），および整数を含まない領域に分割されてしまい，従って，$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 = 1$ は自明となる．このことから (A) を結論することは容易である．

D^* を用いた証明は，基本的には [1] の first method と大同小異であるが，technical にはずっとわかり易く，smooth になる．その証明の解説は，D^* の，符号や重複度も込めた厳密な定義，および D^* の境界の与え方，等と共に，今後の機会にゆずることにしたい．

なお，上の $D^{(1)}$ から $D^{\alpha} \to D^{\alpha}_{\beta}$ の構成と類似に $D^{(1)}_{\beta}$ を作り，

$$\overline{D'} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \alpha^{-1}\sigma\, \overline{D^{(1)}_{\beta}}$$

によって D' を作ると，この D' には first method の手法が全くそのまま適用され，その結果，[1] においては必要で

あった $Re\alpha$, $Im\alpha$ 等に触れることなく，(A) を出すことができる．このことは，虚の2次体だけについては，α 変形を用いなくても，何とか相互法則が良い形で得られることを示している．

文献

[1] 久保田富雄，数の幾何学と類体論，数理研講究録 411, (1981), 121－141.